

MATHEMATIQUES

**LA REDACTION ET LA PRESENTATION SONT PRISES EN COMPTE
POUR 4 POINTS.**

LES CALCULATRICES SONT AUTORISEES.

DUREE : 2 HEURES.

31 DN 120

ACTIVITES NUMERIQUES

*Dans toute cette partie, les résultats des calculs demandés doivent être accompagnés d'explications.
Le barème en tiendra compte.*

Exercice 1

- 1) Ecrire A sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers naturels, b étant le plus petit possible :

$$A = 2\sqrt{45} - 3\sqrt{5} + \sqrt{20}.$$

- 2) Calculer l'expression suivante B et donner son écriture scientifique :

$$B = \frac{150 \times 10^3 \times 8 \times 10^5}{6 \times 10^7}.$$

Exercice 2

On considère l'expression $C = (2x + 5)^2 - (x + 3)(2x + 5)$.

- 1) Développer et réduire C .
- 2) Factoriser C .
- 3) Résoudre l'équation $(2x + 5)(x + 2) = 0$.
- 4) Calculer l'expression C pour $x = -\frac{2}{3}$. (on mettra le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)

Exercice 3

- 1) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases}$$

- 2) Lors d'un spectacle, la famille A, composée de 4 adultes et de 3 enfants, a payé 206 euros. Pour le même spectacle, la famille B, composée de 2 adultes et de 2 enfants, a payé 114 euros. Combien paiera la famille C, sachant qu'elle est composée de 3 adultes et de 2 enfants ?

ACTIVITES GEOMETRIQUES

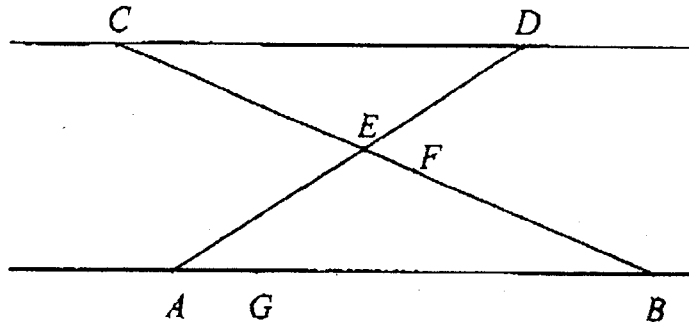
Exercice 1

L'unité est le centimètre.

Dans la figure ci-dessous, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Les droites (AD) et (BC) se coupent en E .

On donne $DE = 6$, $AE = 10$, $AB = 20$ et $BE = 16$.



Les deux figures de cette page ne sont pas réalisées en vraie grandeur. Elles ne sont pas à reproduire.

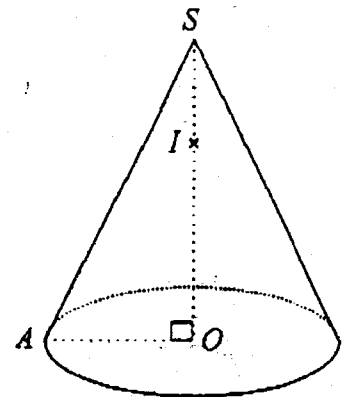
- 1) Calculer la distance CD .
- 2) Les points F et G appartiennent respectivement aux segments $[BC]$ et $[AB]$.
Ils vérifient : $BF = 12,8$ et $BG = 16$. Montrer que les droites (FG) et (AE) sont parallèles.

Exercice 2

On considère le cône ci-contre de sommet S et dont la base est le disque de rayon $[OA]$.

Ce cône a pour hauteur $SO = 8$ cm et pour génératrice $SA = 10$ cm.

I est un point du segment $[SO]$ tel que $SI = 2$ cm.



- 1) Montrer que $OA = 6$ cm.
- 2) Montrer que la valeur exacte du volume V du cône est égale à 96π cm³. Donner la valeur arrondie au mm³ près.
- 3) Déterminer, au degré près, la mesure de l'angle \widehat{ASO} .
- 4) On coupe ce cône par un plan parallèle à sa base et passant par le point I . La section obtenue est un disque de centre I , réduction du disque de base.
 - a) Déterminer le rapport k de cette réduction.
 - b) Soit V' le volume du cône de sommet S et de base le disque de centre I . Exprimer V' en fonction de V , puis donner la valeur arrondie de V' au mm³ près.

Exercice 3

Sur la figure de la feuille annexe (à rendre avec la copie), sont représentés 8 hexagones réguliers. Les constructions demandées dans cet exercice doivent être effectuées directement sur cette feuille annexe.

- 1) Construire le point M tel que $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$.
- 2) Construire le point Q , symétrique de H par rapport à la droite (BE) .
- 3) Construire le point P , image du point C par la rotation de centre E et d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.

PROBLEME

Les parties 1 et 2 sont indépendantes

La figure ci-dessous est une vue de la surface au sol du C.D.I. d'un collège. Ce C.D.I. doit être réaménagé en deux parties distinctes : une salle de recherche et une salle de travail.

$ABCE$ est un trapèze rectangle tel que $AB = 9$ m, $BC = 8$ m et $DE = 6$ m.

M est un point du segment $[AB]$.

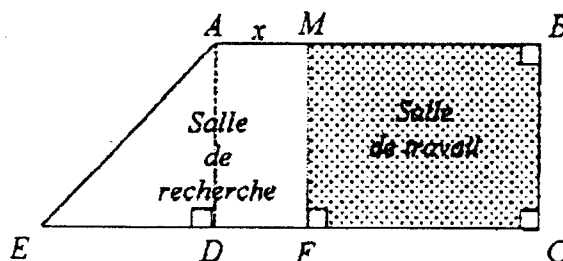
On pose $AM = x$

(x est une distance exprimée en mètre : $0 \leq x \leq 9$).

Rappel :

l'aire d'un trapèze de hauteur h , de bases b et B , est donnée

$$\text{par } a = \frac{h(b+B)}{2}.$$



PARTIE 1 :

La documentaliste souhaite que l'aire de la salle de travail soit égale à celle de la salle de recherche.

- 1) Dans cette question, **uniquement**, on suppose : $x = 1$. Calculer l'aire du trapèze $AMFE$ (salle de recherche), et l'aire du rectangle $MBCF$ (salle de travail).
- 2) a) Exprimer, en fonction de x , l'aire du trapèze $AMFE$.
b) Exprimer, en fonction de x , l'aire du rectangle $MBCF$.
- 3) On se propose de représenter graphiquement cette situation à l'aide de deux fonctions affines f et g .

$$f \text{ est définie par : } f(x) = -8x + 72,$$

$$g \text{ est définie par : } g(x) = 8x + 24.$$

Sur la feuille de papier millimétrée, construire un repère orthogonal :

- l'origine sera placée en bas à gauche,
- en abscisse, on prendra 2 cm pour 1 unité (2 cm pour 1 m),
- en ordonnée, on prendra 1 cm pour 4 unités (1 cm pour 4 m²).

Représenter les fonctions affines f et g , pour $0 \leq x \leq 9$.

- 4) a) En utilisant le graphique, indiquer la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$, ainsi que l'aire correspondante. Mettre en évidence ces valeurs sur le graphique (pointillés, couleurs...).
- b) Retrouver les résultats précédents par le calcul.

PARTIE 2 :

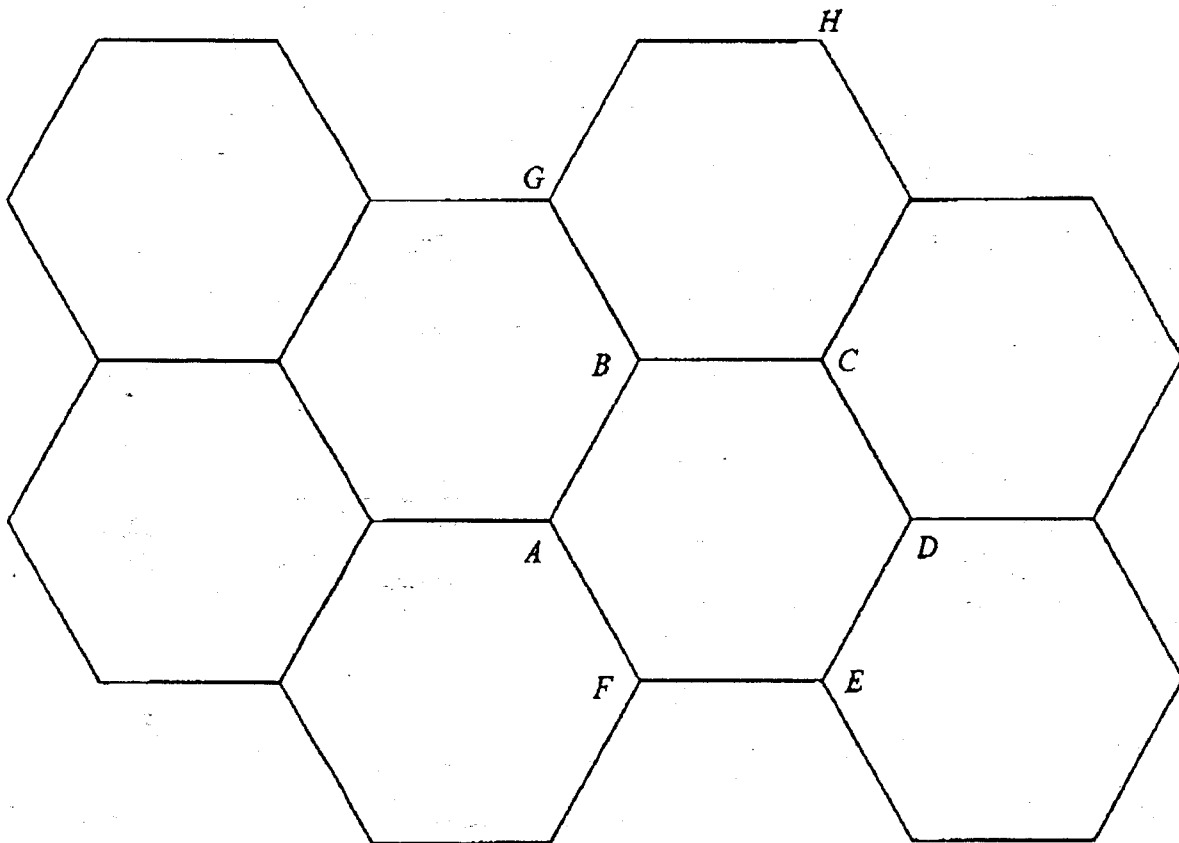
Dans cette partie, on pose $x = 3,5$.

- 1) Donner, en cm, les dimensions de la salle de travail $MBCF$.
- 2) On souhaite recouvrir le sol de la salle de travail à l'aide d'un nombre entier de dalles carrées identiques, de côté c entier le plus grand possible.
 - a) Expliquer pourquoi c est le PGCD de 800 et 550.
 - b) Calculer la valeur de c , en indiquant la méthode utilisée.
 - c) Combien de dalles sont nécessaires pour recouvrir le sol de la salle de travail ?
- 3) Les dalles coûtent 13,50 € le mètre carré.

Quelle somme devra-t-on payer pour acheter le nombre de dalles nécessaire ?

Feuille annexe à rendre obligatoirement avec la copie

Activités géométriques – Exercice 3

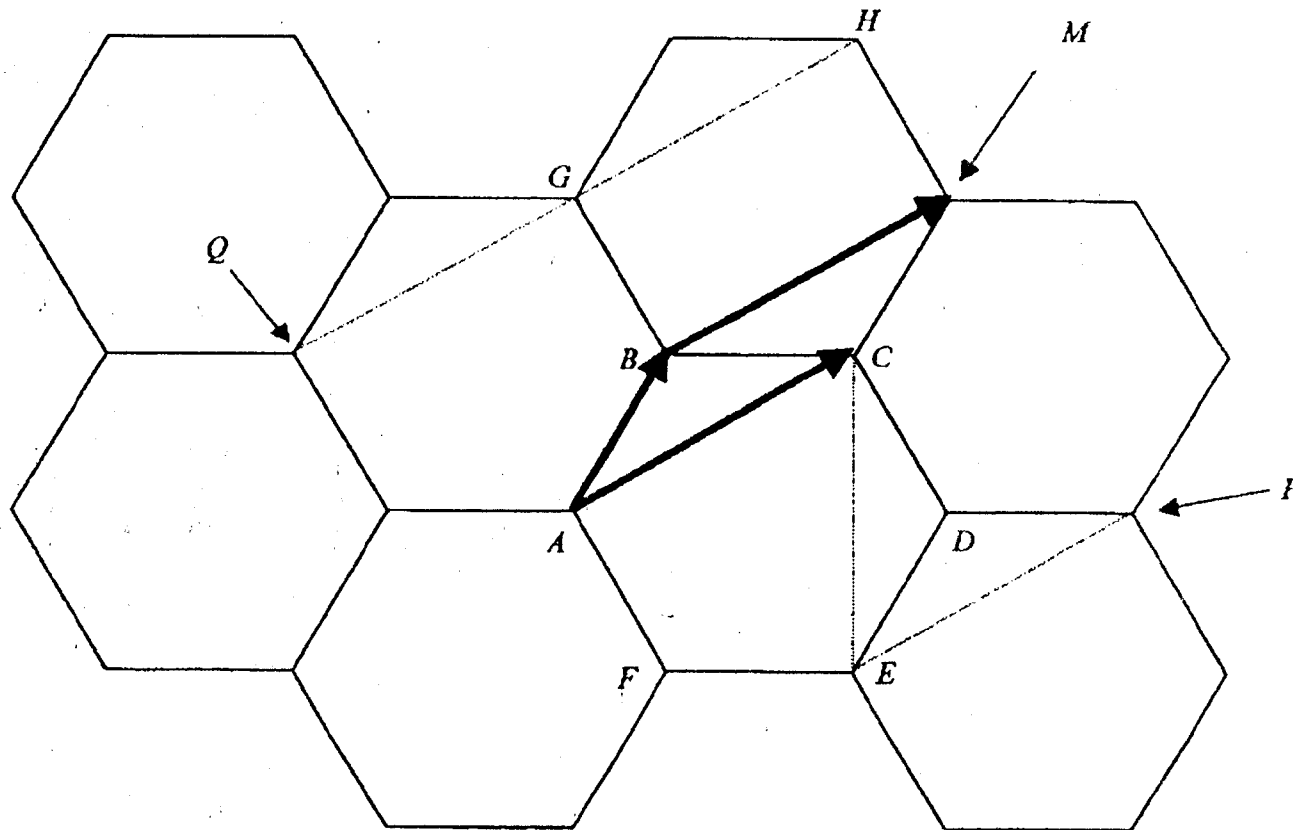


Exercice	Question	CORRIGE DU SUJET E SESSION 2003	Barème
Activités Numériques			
Exercice 1	1)	$A = 2 \times 3\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}.$	1
	2)	$B = \frac{3 \times 50 \times 2 \times 4 \times 10^4}{3 \times 2 \times 10^7} = 200 \times 10^1 = 2000$ (valeur exacte). $B = 2 \times 10^3$ (écriture scientifique).	1 0,5
Exercice 2	1)	$C = (4x^2 + 20x + 25) - (2x^2 + 5x + 6x + 15) = 2x^2 + 9x + 10.$	1,5
	2)	$D = (2x + 5)[(2x + 5) - (x + 3)] = (2x + 5)(x + 2).$	1,5
	3)	Un produit de facteurs étant nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul, on a : $(2x + 5)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5 = 0$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ ou $x = -2.$ Les solutions cherchées sont donc : $x = -\frac{5}{2}$, $x = -2.$	1,5
	4)	Pour $x = -\frac{2}{3}$, $C = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 9 \times \frac{-2}{3} + 10 = \frac{8}{9} - 6 + 10 = \frac{44}{9}.$	1
Exercice 3	1)	$\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{206 - 4x}{3} \\ y = 57 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{206 - 4x}{3} = 57 - x \\ y = 57 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 206 - 4x = 171 - 3x \\ y = 57 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 22 \end{cases}$	3
	2)	En posant x le prix d'entrée pour un adulte et y celui d'un enfant, la famille A paie $4x + 3y$, la famille B paie $2x + 2y$. On est ramené à chercher x et y en écrivant le système précédent. On a donc : $x = 35$ euros et $y = 22$ euros. La famille C paiera : $3 \times 35 + 2 \times 22 = 149$ euros.	1
Activités géométriques			
Exercice 1	1)	On peut utiliser le théorème de Thalès pour la configuration constituée du triangle EAB , de C appartenant à la droite (BE) , de D appartenant à la droite (AE) , des droites parallèles (AB) et (CD) . On peut donc écrire : $\frac{ED}{EA} = \frac{CD}{BA}$ d'où : $CD = BA \times \frac{ED}{EA} = 20 \times \frac{6}{10} = 12$ cm.	1
	2)	Utilisons la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle BEA . Les points B, F, E d'une part, B, G, A d'autre part sont alignés dans le même ordre et on a : $\frac{BF}{BE} = \frac{12,8}{16} = 0,8$ et $\frac{BG}{BA} = \frac{16}{20} = 0,8$. On a donc $\frac{BF}{BE} = \frac{BG}{BA}$. Les droites (FG) et (AE) sont donc parallèles.	1 1

Exercice 2	1)	Utilisons le théorème de Pythagore dans le triangle AOS , rectangle en O . $AO = \sqrt{AS^2 - SO^2} = \sqrt{100 - 64} = 6 : AO = 6 \text{ cm}$.	1
	2)	En notant \mathcal{B} la surface de la base et h la hauteur du cône, on a : $V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi \text{ cm}^3$. En arrondissant au mm^3 , on trouve $V = 301,593 \text{ cm}^3$.	1
	3)	Dans le triangle rectangle SOA , on peut écrire : $\cos(\widehat{ASO}) = \frac{SO}{SA} = 0,8$ donc $\widehat{ASO} = 37^\circ$, en arrondissant au degré près.	1
	4)a)	$k = \frac{SI}{SO} = 0,25$.	0,5
	4)b)	$V' = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times V = \frac{96\pi}{64} \text{ cm}^3 = \frac{3\pi}{2} \text{ cm}^3$. On trouve $V' = 4,712 \text{ cm}^3$ en arrondissant au mm^3 près.	1
Exercice 3	1)	Construction demandée	1,5
	2)	Construction demandée	1,5
	3)	Construction demandée	1,5

Feuille annexe à rendre obligatoirement avec la copie

Activités géométriques – Exercice 3



Problème			
Partie 1	1)	$\mathcal{A}(AMFE) = \frac{1}{2} \times MF \times (AM + EF) = \frac{8(2x+6)}{2} = 32 \text{ cm}^2$ lorsque $x = 1$. $\mathcal{A}(MBCF) = MB \times BC = 8(9-x) = 64 \text{ m}^2$ lorsque $x = 1$.	1
	2)a)	$\mathcal{A}(AMFE) = \frac{1}{2} \times MF \times (AM + EF) = \frac{8(2x+6)}{2} = 8x + 24$. (à l'unité de surface près)	1
	2)b)	$\mathcal{A}(MBCF) = MB \times BC = 8(9-x) = 72 - 8x$. (à l'unité de surface près)	1
	3)	Constructions ci-dessous.	2
	4)a)	La valeur de x associée à l'égalité $f(x) = g(x)$ correspond à l'abscisse du point commun aux deux courbes (C_1) et (C_2) .	1
	4)b)	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -8x + 72 = 8x + 24 \Leftrightarrow 16x = 48 \Leftrightarrow x = 3$. Pour $x = 3$, $f(3) = g(3) = 48$. Pour $x = 3$, les deux pièces ont une surface identique : 48 m^2 .	1
Partie 2	1)	Pour $x = 3,5 \text{ m}$, les dimensions de la pièce $MBCF$ sont respectivement : $MB = 550 \text{ cm}$ et $BC = 800 \text{ cm}$.	0,5
	2)a)	On doit avoir : $550 = c \times k$, avec k entier naturel non nul. $800 = c \times k'$ avec k' entier naturel non nul. Cela signifie déjà que c est un diviseur commun à 550 et à 800. Comme c doit être le plus grand possible, c est en fait le PGCD de 800 et de 550.	1
	2)b)	Avec l'algorithme d'Euclide : $800 = 550 \times 1 + 250$ $550 = 250 \times 2 + 50$: le dernier reste non nul dans la suite de ces divisions euclidiennes étant 50, $\text{PGCD}(800, 550) = 50$. $250 = 50 \times 5 + 0$	1,5
	2)c)	Le nombre de dalles cherché est le produit $k \times k'$ avec $550 = c \times k$ et $800 = c \times k'$. On trouve : $k = 11$, $k' = 16$, Le nombre de dalles cherché est donc : 176.	1
	3)	La surface qui correspond aux 176 dalles achetées est : $50^2 \times 176 = 440\,000 \text{ cm}^2 = 44 \text{ m}^2$. La facture s'élèvera donc à : $44 \times 13,5 = 594$ euros.	1

20

